第７講　場合の数・確率

1　[1]　1個のバクテリアが10分後に2個，1個，0個になる確率がそれぞれ$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{6}$である．

1個のバクテリアが

(1)　20分後に2個になっている確率

(2)　30分後に6個になっている確率

を求めよ．

[2]　3チームA，B，Cが1日に総当たり3試合を行って2勝したチームを優勝とし，優勝チームが出るまで毎日繰り返す．ただしAがBに勝つ確率，BがCに勝つ確率，CがAに勝つ確率は，いずれも$p\,(0<p<1)$であり，引き分けはないものとする．第n日目に優勝チームが決まる確率を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 ［1］ xy 平面上に動点 P がある．さいころを投げて，奇数の目が出れば x 軸の正の方向へ 1 だけ進み，偶数の目が出れば y 軸の正の方向へ 1 だけ進むものとする．動点 P は最初原点にあるものとし，さいころを 8 回投げたとき，原点から P までの距離が 6 以下となる確率を求めよ．

［2］ 赤球 r 個，白球 n 個が入っている袋の中から同時に 2 個取り出す．ただし，r は 2 以上の自然数とする．

(1) 赤球，白球が 1 個ずつである確率を求めよ．

(2) r を固定するとき，(1)の確率を最大にする n とそのときの確率を r を用いて表せ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 ［1］ 1の目が出ているサイコロがある．このサイコロを等確率でいずれかの横の面の側に倒す．この操作を繰り返して n 回目に1か6が出る確率を求めよ．ただし，1と6は反対側の面にあるものとする．

［2］ 座標平面上に4点 A(0, 1)，B(0, 0)，C(1, 0)，D(1, 1) を頂点とする正方形を考え，この正方形の頂点上を点Qが1秒ごとに1つの頂点から隣の頂点に移動しているとする．さらに，点Qは，x 軸と平行な方向の移動について確率 p，y 軸と平行な方向の移動について確率 $1-p$ で移動しているものとする．最初に点Qが頂点Aにいたとするとき，n 秒後に頂点A，Cにいる確率をそれぞれ a_n，c_n とする．

(1) a_2，c_2，a_4，c_4 を求めよ．

(2) a_{2n} を求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第７講　場合の数・確率

1　[1]　1個のバクテリアが10分後に2個，1個，0個になる確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{6}$ である．1個のバクテリアが

(1)　20分後に2個になっている確率

(2)　30分後に6個になっている確率　を求めよ．

(1)　20分後に2個になるのは

(i)　10分後に2個となり，20分後に

・一方が2個，もう一方が0個　　・おのおのが1個　　のいずれかとなる場合．

その確率は　$\frac{1}{2}\times\left({}_2\mathrm{C}_1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)=\frac{5}{36}$

(ii)　10分後に1個となり，20分後に2個となる場合．

その確率は　$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

(i)(ii)より，求める確率は　$\frac{5}{36}+\frac{1}{6}=\mathbf{\frac{11}{36}}$

(2)　30分後に6個になるのは

(i)　20分後に4個，30分後に

・3つが2個，1つが0個　　・2つが2個，2つが1個　　のいずれかとなる場合．

その確率は　$\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left\{{}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{6}+{}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}=\frac{1}{32}$

(ii)　20分後に3個，30分後におのおのが2個となる場合．

その確率は　$\frac{1}{2}\cdot{}_2\mathrm{C}_1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{48}$

(i)(ii)より，求める確率は　$\frac{1}{32}+\frac{1}{48}=\mathbf{\frac{5}{96}}$

1　[2]　3チームA，B，Cが1日に総当たり3試合を行って2勝したチームを優勝とし，優勝チームが出るまで毎日繰り返す．ただし，AがBに勝つ確率，BがCに勝つ確率，CがAに勝つ確率は，いずれも $p(0<p<1)$ であり，引き分けはないものとする．第 n 日目に優勝チームが決まる確率を求めよ．

ある1日にAチームが優勝する確率は $p(1-p)$ である．B，Cについても同様．

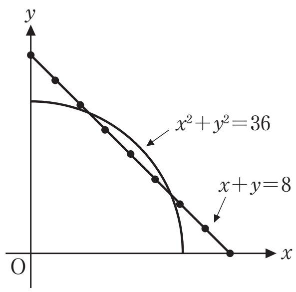
よって，ある1日に優勝チームが出る確率は $3p(1-p)$ である．

ゆえに，第 n 日目に優勝チームが決まる確率は，

$$\{1-3p(1-p)\}^{n-1}\times3p(1-p)=\mathbf{3p(1-p)(1-3p+3p^2)^{n-1}}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 ［1］ xy 平面上に動点 P がある．さいころを投げて，奇数の目が出れば x 軸の正の方向へ 1 だけ進み，偶数の目が出れば y 軸の正の方向へ 1 だけ進むものとする．動点 P は最初原点にあるものとし，さいころを 8 回投げたとき，原点から P までの距離が 6 以下となる確率を求めよ．



奇数の目が x 回，偶数の目が y 回出たとすると，点 $P(X, Y)$ は

$$X=1\cdot x,\ Y=1\cdot y,\ x+y=8,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0$$

つまり $X+Y=8$（$X\geqq 0$，$Y\geqq 0$，X, Y は整数）を満たす点である．
よって，(0, 8)，(1, 7)，(2, 6)，……，(8, 0) の 9 点に限られる．
このうち，$X^2+Y^2\leqq 36$ を満たす点は，(3, 5)，(4, 4)，(5, 3) のみである．
ゆえに，求める確率は

$$_8C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^5+{}_8C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^4+{}_8C_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^3=\boldsymbol{\frac{91}{128}}$$

2 ［2］ 赤球 r 個，白球 n 個が入っている袋の中から同時に 2 個取り出す．ただし，r は 2 以上の自然数とする．

(1) 赤球，白球が 1 個ずつである確率を求めよ．

(2) r を固定するとき，(1)の確率を最大にする n とそのときの確率を r を用いて表せ．

(1) $n\geqq 1$ のとき

$$\frac{_rC_1\times{}_nC_1}{_{n+r}C_2}=\boldsymbol{\frac{2rn}{(n+r)(n+r-1)}}\quad(n=0\text{ のときも成り立つ})$$

(2) (1)の確率を P_n とする．

$P_n<P_{n+1}$ ならば $\dfrac{2rn}{(n+r)(n+r-1)}<\dfrac{2r(n+1)}{(n+r+1)(n+r)}$

$$n(n+r+1)<(n+1)(n+r-1)$$

$$n<r-1\qquad\text{よって}\quad n\leqq r-2$$

$P_n=P_{n+1}$　より　$n=r-1$

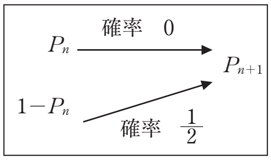
$P_n>P_{n+1}$　より　$n>r-1$　よって　$n\geqq r$

ゆえに　$P_0<P_1<P_2<\cdots\cdots<P_{r-2}<P_{r-1}=P_r>P_{r+1}>\cdots\cdots$

よって，(1)の確率を最大にする n は　$\boldsymbol{n=r-1, r}$　で，その確率は　$\boldsymbol{\dfrac{r}{2r-1}}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 ［1］ 1の目が出ているサイコロがある．このサイコロを等確率でいずれかの横の面の側に倒す．この操作を繰り返して n 回目に1か6が出る確率を求めよ．ただし，1と6は反対側の面にあるものとする．



n 回目に1または6が出る確率を P_n とすると，

2～5が出る確率は　$1-P_n$

よって　$P_{n+1}=\frac{1}{2}(1-P_n)$　　$P_{n+1}=-\frac{1}{2}P_n+\frac{1}{2}$

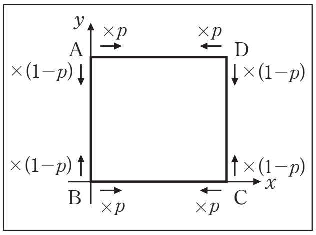
$$P_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(P_n-\frac{1}{3}\right)$$

1が最初に出ているので $P_0=1$ とすると　$P_0-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

$$P_n-\frac{1}{3}=\left(P_0-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$　　よって　$\boldsymbol{P_n=\frac{1}{3}\left\{1+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}}$

3 ［2］ 座標平面上に4点 A(0, 1)，B(0, 0)，C(1, 0)，D(1, 1) を頂点とする正方形を考え，この正方形の頂点上を点Qが1秒ごとに1つの頂点から隣の頂点に移動しているとする．さらに，点Qは，x 軸と平行な方向の移動について確率 p，y 軸と平行な方向の移動について確率 $1-p$ で移動しているものとする．最初に点Qが頂点Aにいたとするとき，n 秒後に頂点A，Cにいる確率をそれぞれ a_n，c_n とする．

(1) a_2，c_2，a_4，c_4 を求めよ．　　(2) a_{2n} を求めよ．



(1) 点QがAを出発し，2秒後にAにいるのは

A→B→A または A→D→A と移動したとき．

よって　$a_2=(1-p)^2+p^2=\boldsymbol{2p^2-2p+1}$

点QがAを出発し，2秒後にCにいるのは

A→B→C または A→D→C と移動したとき．

よって　$c_2=(1-p)p+p(1-p)=\boldsymbol{-2p^2+2p}(=1-a_2)$

点QがAを出発し，4秒後にAにいるのは，

2秒後にA，4秒後にA　（確率 $a_2\times a_2$）

2秒後にC，4秒後にA　（確率 $c_2\times\{(1-p)p+p(1-p)\}=c_2\times c_2$）と移動したとき．

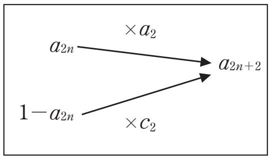
よって　$a_4=(a_2)^2+(c_2)^2=\boldsymbol{8p^4-16p^3+12p^2-4p+1}$

4秒後には点QはAまたはCにのみ存在する．

よって　$c_4=1-a_4=\boldsymbol{-8p^4+16p^3-12p^2+4p}$

(2) $a_{2n+2}=a_{2n}\times a_2+c_{2n}\times c_2=a_{2n}\cdot(2p^2-2p+1)+(1-a_{2n})(-2p^2+2p)$

$=(2p-1)^2a_{2n}-2p^2+2p$，　$a_0=1$



$a_{2n+2}-\frac{1}{2}=(2p-1)^2\left(a_{2n}-\frac{1}{2}\right)$，　$a_0-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

よって　$a_{2n}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\{(2p-1)^2\}^n$　　$\boldsymbol{a_{2n}=\frac{1}{2}\{1+(2p-1)^{2n}\}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　1つの箱の中に1から10までの数が書かれたカードが4枚ずつ計40枚入っている．この箱から m 枚 $(3 \leqq m \leqq 12)$ のカードを同時に取り出す．このうちの3枚のカードが同じ数で残りはこれとは違う互いに異なる数となる確率を $p(m)$ とする．

(1)　$p(m)$ を求めよ．

(2)　$4 \leqq m \leqq 12$ のとき，$f(m) = \dfrac{p(m-1)}{p(m)}$ を求めよ．

(3)　$p(m)$ を最大にする m の値を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　AとBの2人が，1個のサイコロを次の手順により投げ合う．

1回目はAが投げる．

1，2，3の目が出たら，次の回には同じ人が投げる．

4，5の目が出たら，次の回には別の人が投げる．

6の目が出たら，投げた人を勝ちとしそれ以降は投げない．

(1)　n 回目にAがサイコロを投げる確率を a_n，Bがサイコロを投げる確率を b_n とする．a_n, b_n を求めよ．

(2)　ちょうど n 回目のサイコロ投げでAが勝つ確率 p_n を求めよ．

(3)　n 回以内のサイコロ投げでAが勝つ確率 q_n を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　1つの箱の中に1から10までの数が書かれたカードが4枚ずつ計40枚入っている．この箱から m 枚 $(3 \leqq m \leqq 12)$ のカードを同時に取り出す．このうちの3枚のカードが同じ数で残りはこれとは違う互いに異なる数となる確率を $p(m)$ とする．

(1)　$p(m)$ を求めよ．

(2)　$4 \leqq m \leqq 12$ のとき，$f(m)=\dfrac{p(m-1)}{p(m)}$ を求めよ．

(3)　$p(m)$ を最大にする m の値を求めよ．

解答例

(1)　m 枚のカードの選び方は ${}_{40}\mathrm{C}_m$ 通り．

3枚の同じ数のカードの選び方，およびそれとは異なる $m-3$ 枚のカードの選び方は

・同じカードの数字の選び方が10通り

・その数字が書かれたカードの選び方が ${}_4\mathrm{C}_3$ 通り

同じものが複数個あるときは，この部分が抜けやすいので注意．確率は同じものであってもすべて区別する世界．

これらとは異なる $m-3$ 枚のカードの選び方は

・数字の選び方が ${}_9\mathrm{C}_{m-3}$ 通り

・それぞれの数字が書かれたカードの選び方が 4^{m-3} 通り

以上より，求める確率は

$$p(m)=\frac{10\cdot{}_4\mathrm{C}_3\cdot{}_9\mathrm{C}_{m-3}\cdot 4^{m-3}}{{}_{40}\mathrm{C}_m}=\frac{10\cdot 4\cdot\dfrac{9!}{(m-3)!(12-m)!}\cdot 4^{m-3}}{\dfrac{40!}{m!(40-m)!}}=\boldsymbol{\frac{9!m!(40-m)!4^{m-3}}{39!(m-3)!(12-m)!}}$$

(2)
$$f(m)=\frac{p(m-1)}{p(m)}=\frac{\dfrac{9!(m-1)!(41-m)!4^{m-4}}{39!(m-4)!(13-m)!}}{\dfrac{9!m!(40-m)!4^{m-3}}{39!(m-3)!(12-m)!}}=\boldsymbol{\frac{(41-m)(m-3)}{4m(13-m)}}$$

m 枚のときと $m-1$ 枚のときの確率の比較のための式である．

(3)　$f(m)>1$ とすると　$\dfrac{(41-m)(m-3)}{4m(13-m)}>1$　　$(41-m)(m-3)>4m(13-m)$

$3m^2-8m-123>0$

$g(m)=3m^2-8m-123$　とすると，$4 \leqq m \leqq 12$ で $g(m)$ は単調増加であり

$g(7)=-32<0$　　$g(8)=5>0$ より　$g(m)>0$ となるのは $m \geqq 8$ のときである．

したがって $f(m)=\dfrac{p(m-1)}{p(m)}>1$　つまり $p(m-1)>p(m)$ となるのは $8 \leqq m \leqq 12$ のとき

「減少する」とき

逆に，$p(m-1)<p(m)$ となるのは，$4 \leqq m \leqq 7$ のときである．

今回は $p(m-1)=p(m)$ となる整数 m は存在しない．よって「減少」しなければ「増加」する．

よって，$p(3)<p(4)<\cdots\cdots<p(7)>p(8)>\cdots\cdots>p(12)$ より

$p(m)$ を最大にする m の値は　$\boldsymbol{m=7}$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 AとBの2人が，1個のサイコロを次の手順により投げ合う．

1回目はAが投げる．

1，2，3の目が出たら，次の回には同じ人が投げる．

4，5の目が出たら，次の回には別の人が投げる．

6の目が出たら，投げた人を勝ちとしそれ以降は投げない．

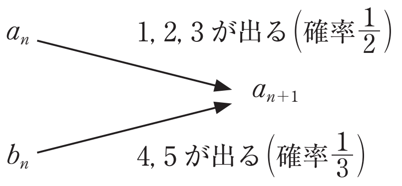
(1) n 回目にAがサイコロを投げる確率を a_n，Bがサイコロを投げる確率を b_n とする．a_n，b_n を求めよ．

(2) ちょうど n 回目のサイコロ投げでAが勝つ確率 p_n を求めよ．

(3) n 回以内のサイコロ投げでAが勝つ確率 q_n を求めよ．

解答例

状態遷移図



(1) $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{3}b_n$ ……①

$b_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+\frac{1}{2}b_n$ ……②

①＋②より

$$a_{n+1}+b_{n+1}=\frac{5}{6}(a_n+b_n),\ a_1+b_1=1+0=1$$

よって，数列 $\{a_n+b_n\}$ は初項1，公比 $\frac{5}{6}$ の等比数列である．　よって　$a_n+b_n=\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$

①－②より

$$a_{n+1}-b_{n+1}=\frac{1}{6}(a_n-b_n),\ a_1-b_1=1 \qquad \text{よって}\quad a_n-b_n=\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

以上より，$\boldsymbol{a_n=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right\}}$，$\boldsymbol{b_n=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right\}}$

(2) n 回目にAがサイコロを投げ，6の目が出ればよい．

$$p_n=\frac{1}{6}a_n=\boldsymbol{\frac{1}{12}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right\}}$$

(3) $$q_n=\sum_{k=1}^{n}p_k=\frac{1}{12}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}+\left(\frac{1}{6}\right)^{k-1}\right\}$$

$$=\frac{1}{12}\left\{\frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^n}{1-\frac{5}{6}}+\frac{1-\left(\frac{1}{6}\right)^n}{1-\frac{1}{6}}\right\}$$

$$=\boldsymbol{\frac{3}{5}-\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^n-\frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^n}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。